10. Ressonância Não Linear / Ilhas no Espaço de Fase

PGF 5005 - Mecânica Clássica

web.if.usp.br/controle

(Referência principal: G. Zaslavsky, The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems, 2nd edition, 2007)

IFUSP
2024

Hamiltoniana quase integrável

$$H = H_0 + H_1 \quad , \quad H_0/H_1 << 1$$

Termo ressonante ➔ Ilhas no espaço de fase

Cada ilha é similar à ilha do espaço de fase
de um pêndulo vertical.

Calculo da posição e largura das ilhas .
Essas grandezas dependem dos parâmetros da
Hamiltoniana integrável, H_0 , e do termo perturbador,
H_1.

Hamiltoniana não autônoma em termos de ângulo e ação

$$H = H_0(I) + \epsilon V(I, \theta, t) \quad \epsilon \ll 1$$

V é periódico em t com período $T = 2\pi/\nu$

Periódica em θ

$$V(I, \theta, t) = \frac{1}{2} i\epsilon \sum_{k,\ell} V_{k,\ell}(I) e^{i(k\theta - \ell\nu t)} + \text{c.c.}$$

$$V^*_{k,\ell} = V_{-k,-\ell} \,,$$

Equações de Hamilton (sistema não integrável)

$$\dot{I} = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \sum_{k,\ell} k V_{k,\ell}(I) e^{i(k\theta - \ell \nu t)} + \text{c.c.}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{dH_0}{dI} + \epsilon \frac{\partial V(I,\theta,t)}{\partial I} = \omega(I) + \frac{1}{2}\epsilon \sum_{k,\ell} \frac{\partial V_{k,\ell}(I)}{\partial I} e^{i(k\theta - \ell \nu t)} + \text{c.c.}$$

Frequência $\quad \omega(I) = \dfrac{dH_0}{dI}$

Ressonância

Ocorre na região do espaço de fase em que

d/dt $(k\theta - \ell\nu t)$ **≈ 0**

Portanto k d/dt θ - $l\nu \approx 0$

Vamos considerar que **d/dt θ ≈ ω (*I*)** ***(frequência de H_o)***

$$k\omega(I) - \ell\nu = 0$$

Valor de I onde está a ressonância no espaço de fase

Considerando apenas um modo ressonante

Termo ressonante em $I = I_0$

Modo ressonante k_0, l_0 $k = \pm k_0, \; \ell = \pm \ell_0$

Equações de Movimento (sistema integrável)

$$\dot{I} = \epsilon k_0 V_0 \sin(k_0\theta - \ell_0 \nu t + \phi)$$

$$\dot{\theta} = \omega(I) + \epsilon \frac{\partial V_0}{\partial I} \cos(k_0\theta - \ell_0 \nu t + \phi)$$

$$V_{k_0,\ell_0} = |V_{k_0,\,\ell_0}| e^{i\phi} = V_0 e^{i\phi}$$

$$V_0 = V_0(I_0)$$

$$\Delta I = I - I_0 \qquad \omega(I) = \omega_0 + \omega' \Delta I$$

$$\omega_0 = \omega(I_0)\,, \quad \omega' = d\omega(I_0)/dI$$

Equações de Movimento

$$\frac{d}{dt}(\Delta I) = -\epsilon k_0 V_0 \sin\psi$$

$$\frac{d}{dt}\psi = k_0 \omega' \Delta I$$

$$\psi = k_0\theta - \ell_0 \nu t + \phi - \pi$$

Equações de movimento podem ser escritas como equações de Hamilton para H = H (*ΔI, Ψ*)

$$\frac{d}{dt}(\Delta I) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi}\,; \qquad \frac{d}{dt}\psi = \frac{\partial \bar{H}}{\partial(\Delta I)}$$

$$\bar{H} = \frac{1}{2}k_0\omega'(\Delta I)^2 - \epsilon k_0 V_0 \cos\psi$$

Um par de variáveis canônicas (um grau de liberdade) $(\Delta I, \psi)$

H similar à do pêndulo $H_0 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x$

Sistema integrável

Das equações de Hamilton obtemos: $$\ddot{\psi} + \Omega_0^2 \sin\psi = 0$$
(similar ao pêndulo)

Para amplitude pequena $$\Omega_0 = (\epsilon k_0^2 V_0 |\omega'|)^{1/2}$$

$$\psi = k_0\theta - \ell_0 \nu t + \phi - \pi$$

Modo k_0 e l_o

V_0 amplitude da perturbação (H_1)

$$V_{k_0,\ell_0} = |V_{k_0,\,\ell_0}| e^{i\phi} = V_0 e^{i\phi}$$

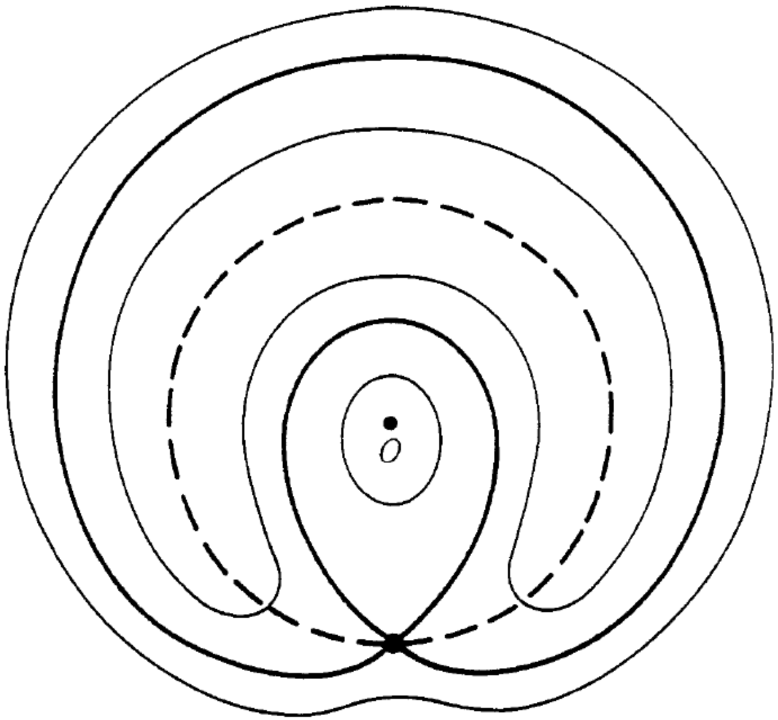
$\boldsymbol{\omega'}$ shear (cizalhamento) (H_0)

$$\omega(I) = \frac{dH_0}{dI} \qquad \omega(I) = \omega_0 + \omega' \Delta I$$

$$\omega_0 = \omega(I_0)\,, \quad \omega' = d\omega(I_0)/dI$$

Ressonância isolada no plano p x q

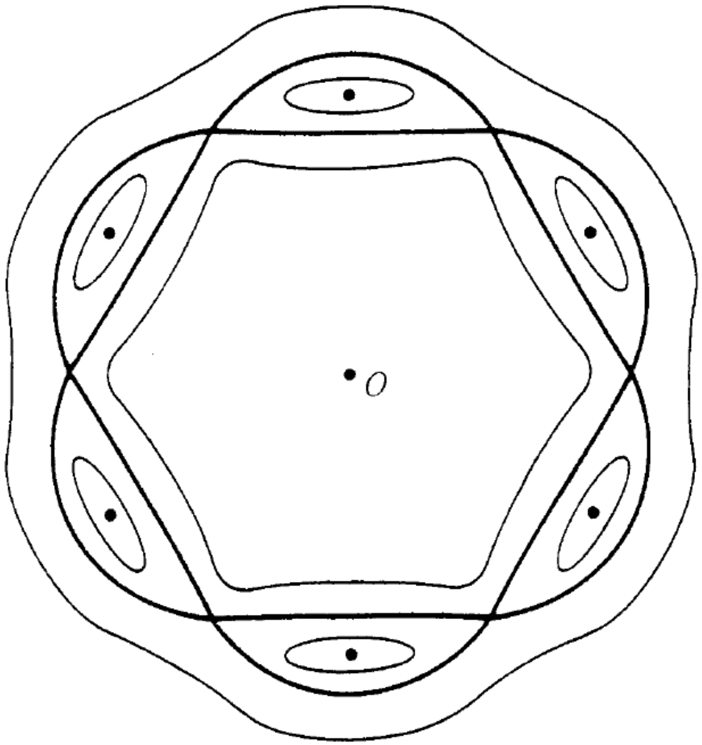
$$k_0 = \ell_0 = 1$$



Linha pontilhada(para H sem a perturbaçào ressonante) $I = I_0$

Um ilha devida ao modo 1/1

Ressonância isolada no plano p x q



$$k_0 = 6,\ \ell_0 = 1$$

Seis ilhas devida ao modo 6/1

Parâmetros Relevantes

Não linearidade
$$\alpha = \frac{I_0}{\omega_0}\left|\frac{d\omega(I_0)}{dI}\right| \equiv \frac{I_0}{\omega_0}|\omega'|$$

Largura de um ilha
$$\frac{\max \Delta I}{I_0} \sim \left(\epsilon \frac{V_0}{|\omega'|}\right)^{1/2} \frac{1}{I_0} \sim \left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right)^{1/2}$$

$$V_0 \sim H_0 \sim \omega_0 I_0$$

$$\frac{\max \Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Omega_0}{\omega_0} = (\epsilon\alpha)^{1/2}$$

Critério de Chirikov

Critério de estimativa para a
transição de áreas caóticas locais para área caótica global.

Utilidade:
Previsão para caos global a partir dos parâmetros do sistema

Aplicado sem obter as trajetórias perturbadas

B. V. Chirikov

(1959) Atomnaya Energiya **6**, 630 (in Russian)

(1979) Phys. Rep. 52, 264

Pesquisador que introduziu o Mapa Padrão ou Mapa de Chirikov

Muito usado em sistemas dinâmicos
Assunto da parte III da disciplina

B. V. Chirikov, "Research concerning the theory of nonlinear resonance and stochasticity", Preprint N 267, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk (1969), (Engl. Trans., CERN Trans. 71-40 (1971))

B. V. Chirikov, "A universal instability of many-dimensional oscillator systems", Phys. Rep. 52: 263 (1979).

Critério de Chirikov

Critério de estimativa para a
transição de áreas caóticas locais para área caótica global.

Utilidade:
Previsão para caos global a partir dos parâmetros do sistema

Aplicado sem obter as trajetórias perturbadas

B. V. Chirikov

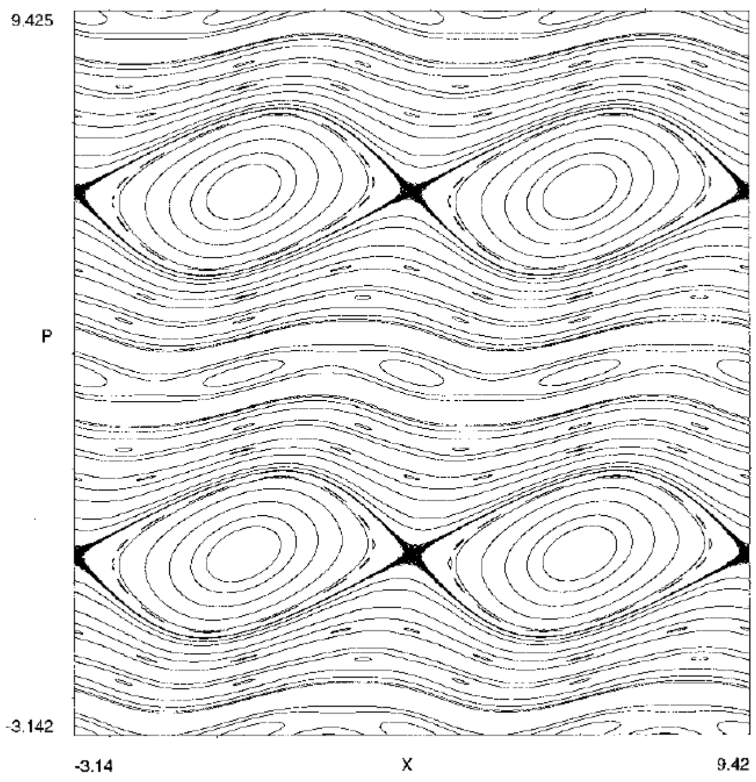
Resonance processes in magnetic traps, At. Energ. 6: 630 (1959) (in Russian; Engl. Transl., J. Nucl. Energy Part C: Plasma Phys. 1: 253 (1960)

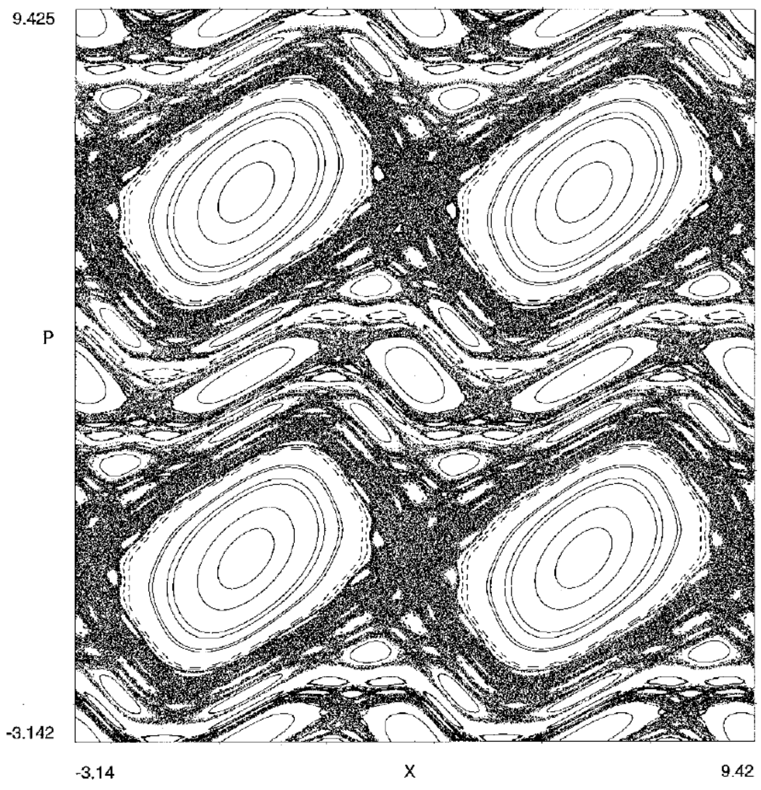
A universal instability of many-dimensional oscillator systems, Phys. Rep. 52: 263 (1979)

Boris Chirikov first presented his results on the stochastic instability of magnetically confined plasma at the Kurchatov seminar in Moscow in 1958, when the plasma research was classified secret. Only after the London plasma conference of 1958 did the results become public [1]. Boris Chirikov had started his career as an experimenter, but the world would now know him as the theorist who invented the resonance overlap criterion.

What we now know as **the Chirikov criterion** came as a result of Chirikov's generalizing the **theoretical analysis he had first performed for the stochastic instability of confined plasma**. (from Reminiscences of Boris Chirikov (http://www.scholarpedia.org/wiki/images/ftp/chirikov2008s.pdf)).

Mapa varia com um parâmetro de controle do sistema

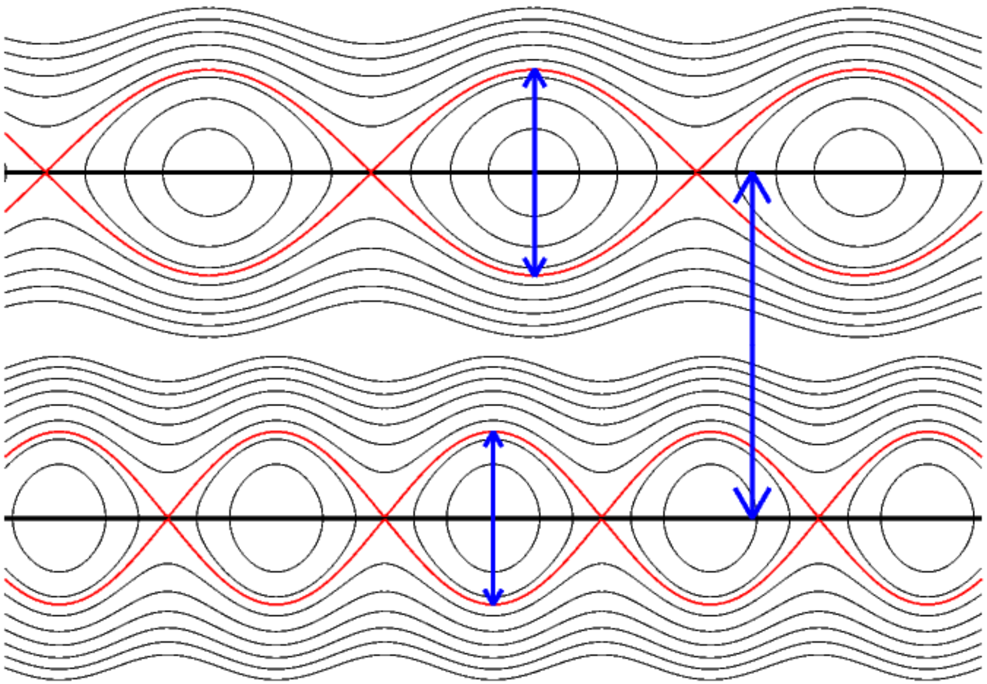




Como prever os valores do parâmetro de controle críticos para a ampliação da área caótica?

Soma das semi larguras de duas ilhas/distância entre essas ilhas

$$K_c = \frac{\Delta I}{\delta I}$$ Largura/Distância



$$K_c \ll 1$$

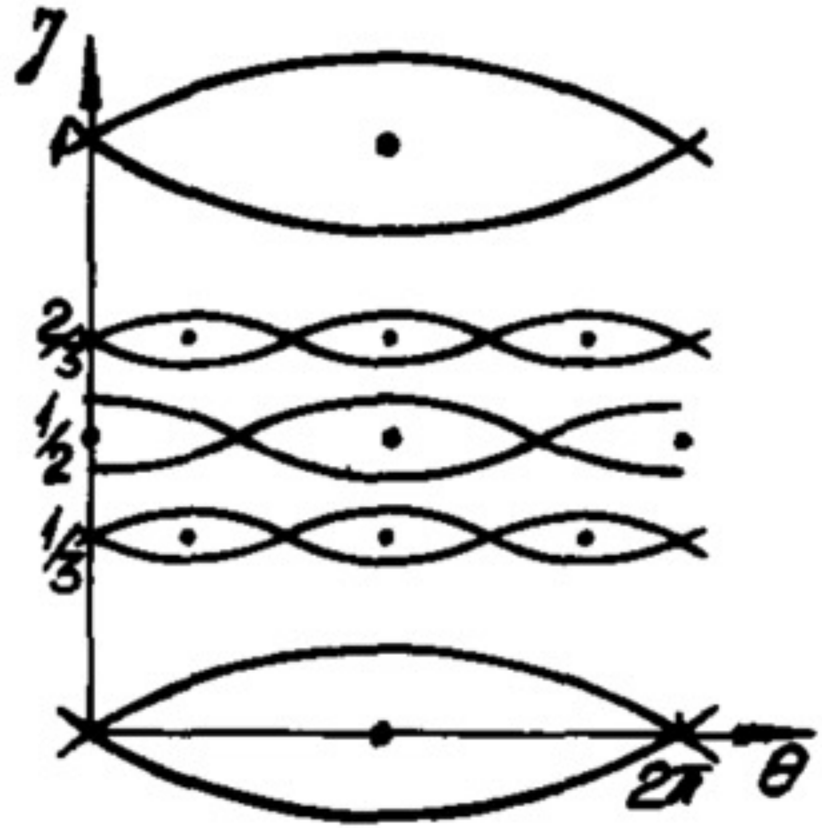
Área caótica pequena

$$K_c \gtrsim 1$$

Área caótica dominante

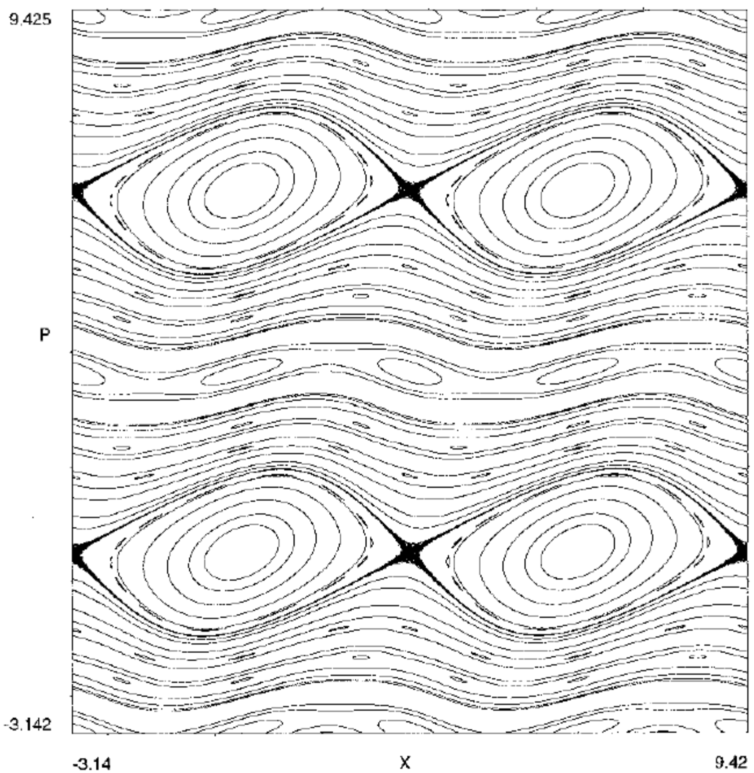
Largura das ilhas principais

Distância entre duas cadeias de ilhas principais

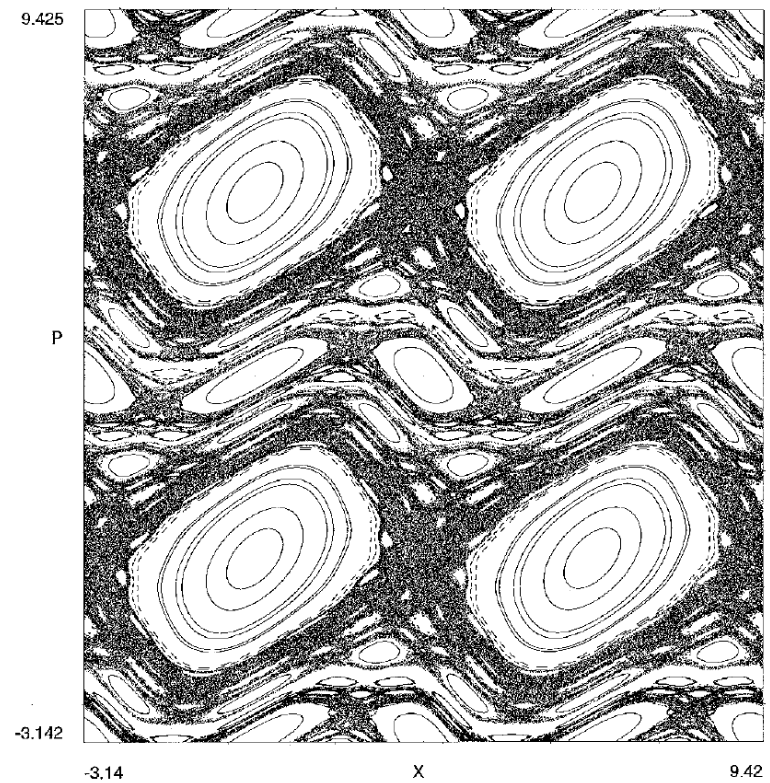


Parâmetro de Chiricov

$$K_c \ll 1$$



$$K_c \gtrsim 1$$



Critério de Chirikov: $K_c \gtrsim 1$

$$K_c = \frac{\Delta I}{\delta I}$$

Para ΔI << 1 δI << 1

$$\Delta\omega = |\omega'|\Delta I\,, \quad \delta\omega = |\omega'|\delta I$$

$$K_c = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \gtrsim 1$$